ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 46 **Межвузовский сборник научных трудов** **2014**

УДК 519.83+330.45

О.А. Малафеев, Г.В. Алферов, Н.Д. Рединских
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф,
Университетский пр., 35
alferovgv@gmail.com, malafeyevoa@mail.ru

МНОГОАГЕНТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ АУКЦИОНА ПРИ ВОЗМОЖНОЙ КОРРУПЦИИ*

При распределении заказов в различных областях народного хозяйства для предотвращения коррупции широко используется практика организации тендеров, которые позволяют снизить завышенные затраты производства, возникающие вследствие коррупции. Формализуется многошаговая теоретико-игровая модель аукциона первой цены с возможным возникновением коррупции.

Ключевые слова: теоретико-игровая модель аукциона; компромиссное решение; коррупционная модель.

1. Постановка задачи и формализация модели

Задачам моделирования и исследования социально-экономических систем посвящено значительное число разнообразных публикаций [1–17]. В данной работе рассматривается многошаговая теоретико-игровая модель аукциона первой цены с возможным возникновением коррупции Γ_p^l (l – количество

*Работа частично поддержана грантом РФФИ№14-06-00326.

шагов в игре, p – перестановка, в случае последовательной игры). В игре конечное число заказчиков, составляющих множество $S = \{s_1,...,s_n\}(n \geq 2)$, которые выставляют на торги каждый свой контракт, имея его оценку $w_i > 0$ и указывая цену $p_j^l > 0$, где $j = 1,...,n$ и $\overline{p}_j^l \in \overline{P}_j^l$, где $\overline{P}_j^l = [\overline{p}_1^l,...,\overline{p}_n^l]$ – множество стратегий заказчика, желающего распределить j-й контракт на l-м шаге игры. Так же конечное число фирм-исполнителей, составляющих множество $F = \{f_1,...,f_n\}(n \geq 2)$. Фирмы-исполнители, учитывая предысторию игры, указывают свои цены $p_{ij} > 0$, по которым они готовы выполнить условия контракта, имея свои оценки по издержкам c_{ij}, где $i = 1,...,n; j = 1,...,n$, и $p_{ij}^l \in P_{ij}^l, P_{ij}^l = [p_{11}^l,...,p_{nn}^l]$ – множество стратегий i-й фирмы на l-м шаге игры. В модели, фирмы-исполнители конкурируют за контракты посредством аукциона первой цены. Для проведения аукциона заказчики нанимают посредника-аукциониста, отвечающего за распределение контрактов, и выплачивают ему заработную плату в размере r. В модели предполагается, что аукционист может повлиять на процесс распределения контрактов. Фирмам-исполнителям известно, что аукционист коррумпирован. После подачи заявок $(p_1,...,p_n)$ у фирм есть возможность предложить взятку $b_i^l > 0$, где $i = 1,...,n$ и $b_{ij}^l \in B_{ij}^l$, где $B_{ij}^l = [b_{11}^l,...,b_{nn}^l]$. Множество стратегий i-й фирмы предложенная взятка на l-м шаге игры. Взятка b_i ограничена сверху величиной $\overline{B}$.

На последнем этапе аукционист оглашает все заявки $(p_{11},...,p_{ij}^{'},...,p_{nn})$, где $p_{ij}^{'}$ – цена фирмы f_i по j-му контракту скорректировавшей свою заявку. Если $p^* = \min(p_{ij})$ не больше, чем предельная цена $\overline{p}_j$ заказчика s_j, то фирма f_i получает контракт по цене p^*. Предлагается выполнение следующих условий: оценка w_i i-го контракта заказчиком s_j не меньше назначенной им цены $\overline{p}_j^i$ за контракт на l-ом шаге игры; число заказчиков и фирм-исполнителей равны; предложение цены p_{ij} фирмой f_i по i-му контракту ограничено издержками c_{ij} фирмы f_i. В модели рассматривается два случая:

Случай 1. Если на один контракт j на первом шаге игры претендуют несколько фирм-исполнителей f_i и f_k с одинаковой ценой $p_{ij}^l = p_{kj}^l$, где $k \neq i; j,i,k = 1,...,n$, то между ними разыгрывается аукцион с одним заказчиком.

Случай 2. Если на каждый контракт j на i-м шаге игры имеется несколько фирм-исполнителей f_i с разными ценами $p_{ij}^l = p_{kj}^l$, где $k \neq i; j,i,k = 1,...,n$, пусть для простоты $p_{ij}^l < p_{kj}^l$ то контракт получает фирма f_i, назвавшая минимальную цену.

Для случая два построим игру Γ_p^l (l – количество шагов в игре, p – перестановка, в случае последовательной игры) в нормальной форме. В результате выбора заказчиками и фирмами-исполнителями своих стратегий $p_{ij}^l \in P_{ij}^l, b_{ij}^l \in B_{ij}^l, \overline{p}_j^l \in \overline{P}_j^l$, где $i = 1,...,n$ и $j = 1,...,n$ на 1-ом шаге реализуется ситуация: $z^1 = (p_{11}^1,...,p_{ij}^1,...,p_{nn}^1; b_{11}^1,...,b_{ij}^1,...,b_{nn}^1; \overline{p}_j^1,...,\overline{p}_n^1)$.

Далее заказчики, исполнители и аукционист получают выигрыши $H_i(z^1), H_j(z^1), H_A(z^1)$, соответственно. Получаем следующую игру Γ_p^l, где P – перестановка в случае последовательной игры, p – показывает, какая игра из P перестановок реализуется в данный момент на первом шаге.

$$\Gamma_p^l = \left\langle I^1 = \{1,...,n\}, J^1 = \{1,...,n\}, \{P_i^1\}_{i=1}^n, \{\overline{P}_j^1\}_{j=1}^n, \{B_i^1\}_{i=1}^n, \{C^1\}_{[n\times m]}, \{W^1\}, \{H^1\}_{i=1}^n, \{H^1\}_{j=1}^n, \{H_A\} \right\rangle$$

$$P = \{i_1,...,i_n, j_1,...,j_n\}$$

$$H_i^1 = \begin{cases} p_{ij}^1 - c_{ij} - b_{ij}^1, \text{если} \quad p_{ij}^1 = \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{ij}^1), p_{ij}^1 \le \overline{p}_j^1, p_{ij}^1 \ge c_{ij}^1, \text{где } i=1,...,n \;\; и \;\; j=1,...,n \\ 0, \qquad \text{если } p_{ij}^1 = \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{ij}^1), p_{ij}^1 > \overline{p}_j^1, p_{ij}^1 < c_{ij}^1, \text{где } i=1,...,n \;\; и \;\; j=1,...,n \end{cases},$$

$$H_j^1 = \begin{cases} w_j - p_{ij}^1, \text{если} \quad p_{ij}^1 = \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{kj}^1), p_{ij}^1 \le \overline{p}_j, p_{ij}^1 \ge c_{ij}, \text{где } i=1,...,n \;\; и \;\; j=1,...,n \\ 0, \qquad \text{если } p_{ij}^1 \ne \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{ij}^1), p_{ij}^1 > \overline{p}_j, p_{ij}^1 < c_{ij}, \text{где } i=1,...,n \;\; и \;\; j=1,...,n \end{cases},$$

$$H_A^1 = \begin{cases} r + b_{i1}^1 + ... + b_{in}^1, \text{если} \quad b_{ij}^1 = \max\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(b_{ij}^1), b_{ij}^1 \le \overline{B} \\ 0, \qquad \text{если } b_{ij}^1 \ne \max\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(b_{kj}^1), b_{ij}^1 > \overline{B} \end{cases}.$$

Таким образом, в ситуации z^1 фирма f_i заключает j-й контракт, если назначенная цена p_{ij}, является самой низкой среди всех предложений $(p_{11},...,p_{ij}^{'},...,p_{nn})$, где $p_{ij}^{'}$ цена фирмы f_i по j-му контракту скорректировавшей свою заявку, назначенных другими фирмами за этот контракт и не больше, цены $\overline{p}_j$ назначенной заказчиком s_j. На втором шаге процесс повторяется с меньшим количеством заказчиков и фирм-исполнителей (аукцион покидают заказчики и фирмы, заключившие контракты). Аукцион заканчивается, когда все контракты будут реализованы. Рассмотрим l-й шаг игры Γ_p^l (l – количество шагов в игре, p – перестановка, в случае последовательной игры). В результате выбора заказчиками и фирмами-исполнителями своих стратегий $p_{ij}^l \in P_{ij}^l, b_{ij}^l \in B_{ij}^l, \overline{p}_j^l \in \overline{P}_j^l$, где $i=1,...,n-k$ и $j=1,...,n-k$ на l-м шаге (здесь k – количество заказчиков и исполнителей, которые заключили контракты), реализуется ситуация: $z^l = (p_{11}^l,...,p_{ij}^l,...,p_{nn}^l; b_{11}^l,...,b_{ij}^l,...,b_{nn}^l; \overline{p}_j^l)$.

Далее заказчики, исполнители и аукционист получают выигрыши $H_i(z^l), H_j(z^l), H_A(z^l)$, соответственно. Получаем следующую игру Γ_p^l на первом шаге.

$$\Gamma_p^l = \left\langle I^l = \{1,...,n-k\}, J^l = \{1,...,n-k\}, \{P_i\}_{i=1}^{n-k}, \{\overline{P}_j\}_{j=1}^{n-k}, \{B_i\}_{i=1}^{n-k}, \{C\}_{[n\times m]}^l, \{W^l\}, \{H\}_{j=1}^{n-k}, \{H_A\} \right\rangle$$

$$H_i^l = \begin{cases} p_{ij}^l - c_{ij} - b_i, \text{если } p_{ij}^l = \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{kj}^l), p_{ij}^l \le \overline{p}_j^1, p_{ij}^l \ge c_{ij}, \text{где } i=1,...,n-k \; u \; j=1,...,n-k, \\ 0, \qquad \text{если } p_{ij}^l \ne \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{kj}^l), p_{ij} > \overline{p}\;, p_{ij}^l < c_{ij}, \text{где } i=1,...,n-k \; u \; j=1,...,n-k. \end{cases}$$

$$H_j^l = \begin{cases} w_j - p_i, \text{если } p_{ij}^l = \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{kj}^l), p_{ij}^l \le \overline{p}_j^l, p_{ij}^l \ge c_{ij}, \text{где } i=1,...,n-k \; u \; j=1,...,n-k, \\ 0, \qquad \text{если } p_{ij}^l \ne \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{kj}^l), p_{ij}^l > \overline{p}_j^l, p_{ij}^l < c_{ij}, \text{где } i=1,...,n-k \; u \; j=1,...,n-k. \end{cases}$$

$$H_A^l = \begin{cases} r + b_{i1} + \ldots + b_{in}, \text{если } \mathrm{b}_{ij}^l = \max\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(b_{kj}), b_{ij} \le \overline{B} \\ 0, \qquad \text{если } b_{ij} \ne \max\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(b_{kj}), b_{ij} > \overline{B} \end{cases}$$

Таким образом, в ситуации z^1 фирма f_i заключает j-й контракт, если назначенная цена p_{ij}, является самой низкой среди всех предложений $(p_{11},...,p_{ij}^{'},...,p_{nn})$, где $p_{ij}^{'}$ – цена фирмы f_i по j-му контракту скорректировавшей свою заявку, назначенных другими фирмами за этот контракт и не больше, цены $\overline{p}_j$ назначенной заказчиком s_j. Аукцион заканчивается, когда все контракты будут реализованы.

2. Численный пример многошаговой игры аукциона с полной информацией, аукционистом, заказчиком и двумя фирмами

Приведём пример аукциона первой цены с возможным возникновением коррупции. В рассматриваемом примере заказчики $(n=2)$, посредством посредника-аукциониста, имея оценки по лотам $w_1 = 12, w_2 = 11$, выставляют на аукцион подряды по ценам $\overline{p}_1 = 10, \overline{p}_2 = 10$, соответственно. Фирмы для каждого лота имеют свои оценки по затратам на выполнение подрядов $c_{11}=4, c_{12}=5, c_{21}=6, c_{22}=7$. Последовательно друг за другом указывают свои цены $p_1=\{10,9,8\}, p_2=\{10,9,8\}$. После этого, у фирм есть возможность, учитывая собственные издержки, предложить аукционисту взятки $b_1=\{0,1\}$ и $b_2=\{0,1\}$. Взятка ограничена сверху величиной $\overline{B}=1$. Фирма, предложившая максимальную взятку, получает право на корректировку, не превышающую фиксированный шаг $f=1$ приращения заявок.

Таким образом, реализуется ситуация: $z=(p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}; b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}; \overline{p}_1, \overline{p}_2)$. Далее заказчики, исполнители и аукционист получают выигрыши $H_i(z), H_j(z), H_A(z)$, соответственно.

Получаем следующую игру Γ^2.

$$\Gamma^2 = \left\langle I = \{1,\}, J = \{1,2\}, \{P_i\}_{i=1}^2, \{\overline{P}_j\}_{j=1}^2, \{B_i\}_{i=1}^2, \{C\}_{[2\times 2]}, \{W\}_{j=1}^2, \{H_i\}_{i=1}^n, \{H\}_{j=1}^2, \{H_A\} \right\rangle,$$

где

$$H_i = \begin{cases} p_{ij} - c_{ij} - b_i, \text{ если } p_{ij} = \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{kj}), p_{ij} \le \overline{p}_j, p_{ij} \ge c_{ij}, \text{где } i=1,2,3 \text{ и } j=1,2 \\ 0, \quad \text{если } p_{ij} = \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_{kj}), p_{ij} > \overline{p}_j, p_{ij} < c_{ij}, \text{где } i=1,2,3 \text{ и } j=1,2 \end{cases},$$

$$H_j = \begin{cases} w_j - p_i, \text{ если } p_i = \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_k), p_{ij} \le \overline{p}, p_{ij} \ge c_{ij}, \text{ где } i=1,2,3 \text{ и } j=1,2 \\ 0, \quad \text{если } p_i \ne \min\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(p_k), p_{ij} > \overline{p}_j, p_{ij} < c_{ij}, \text{где } i=1,2,3 \text{ и } j=1,2 \end{cases},$$

$$H_A^1 = \begin{cases} r + b_{i1} + b_{i2}, \text{ если } b_{ij} = \max\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(b_{kj}), b_{ij} \le \overline{B} \\ 0, \quad \text{если } b_{ij} \ne \max\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne i}}(b_{kj}), b_{ij} > \overline{B} \end{cases}.$$

Заключение

Таким образом, в ситуации z^1 фирма f_i заключает j-й контракт, если назначенная цена p_{ij}, является самой низкой среди всех предложений $(p_{11},\ldots,p'_{ij},\ldots,p_{11})$, где p'_{ij} цена фирмы f_i по j-му контракту скорректировавшей свою заявку, назначенных другими фирмами за этот контракт и не больше, цены $\overline{p}_j$ назначенной заказчиком s_j.

На втором шаге процесс повторяется с меньшим количеством заказчиков и фирм-исполнителей (аукцион покидают заказчики и фирмы, заключившие контракты). Процесс заканчивается, когда все контракты будут реализованы. В результате построения дерева игры с использованием алгоритма поиска компромиссного решения найден компромисс для всех игроков, для фирм-исполнителей и для заказчиков.

Библиографический список

1. *Алферов Г.В.* К вопросу управления робототехнической системой на основе базы знаний // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь, 1995. Вып. № 29. С. 6–13.

2. *Алферов Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С.* Теоретико-игровые модели поиска подвижного объекта при инспектировании // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь, 2014. Вып. 46. С. 11–19.

3. *Alferov G.V., Malafeyev O.A., Maltseva A.S.* Game-theoretic model of inspection by anticorruption group // Conference ICNAAM 2014. Greece, 22–28. September. 2014.

4. *Грицай К.Н., Малафеев О.А.* Задача конкурентного управления в модели многоагентного взаимодействия аукционного типа // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь, 2007. Вып. 39. С. 36–45.

5. *Дроздова И.В., Малафеев О.А., Паршина Л.Г.* Эффективность вариантов реконструкции городской жилой застройки // Экономическое возрождение России. 2008. № 3. С. 63–67.

6. *Ершова Т.А., Малафеев О.А.* Конфликтные управления в модели вхождения в рынок // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь, 2004. Вып. 36. С. 19–27.

7. *Колокольцов В.Н., Малафеев О.А.* Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение. Ч. I // Вестник гражданских инженеров . 2010. № 4. С. 144–153.

8. *Малафеев О.А.* О существовании обобщенного значения динамической игры // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1972. № 19. С. 41.

9. *Малафеев О.А.* Конфликтно управляемые процессы со многими участниками: автореф. дис. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. Ленинград, 1987.

10. *Малафеев О.А., Бойцов Д.С., Рединских Н.Д., Неверова Е.Г.* Компромисс и равновесие в моделях многоагентного управления в коррупционной сети социума // Молодой ученый. 2014. № 10 (69). С. 14–17.

11. *Малафеев О.А., Грицай К.Н.* Конкурентное управление в моделях аукционов // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь, 2004. Вып. 36. С. 74–82.

12. *Малафеев О.А., Пахар О.В.* Динамическая нестационарная задача инвестирования проектов в условиях конкуренции // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь, 2009. Вып. 41. С. 103–108.

13. *Малафеев О.А., Муравьев А.И.* Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение Т. 1: Общая теория и вспомогательные сведения. Санкт-Петербург, 2000.

14. *Малафеев О.А., Соснина В.В.* Модель управления процессом кооперативного трехагентного взаимодействия // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь, 2007. Вып. 39. С. 131–144.

15. *Парфенов А.П., Малафеев О.А.* Равновесное и компромиссное управление в сетевых моделях многоагентного взаимодействия // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь, 2007. Вып. 39. С. 154–167.

16. *Шкрабак В.С., Малафеев О.А., Скробач А.В., Скробач В.Ф.* Математическое моделирование процессов в агропромышленном производстве. Санкт-Петербург, 2000.

17. *Malafeev O.A., Troeva M.S.* A weak solution of Hamilton-Jacobi equation for a differential two-person zero-sum game // Preprints of the Eight International Symposium on Differential Games and Applications. 1998. C. 366–369.